

歯車軸系の振動・騒音

飯田 裕*

Noise and Vibration of Gear System

Hiroshi IIDA*

This paper reviews studies on noise and vibration of gear system as well as the latest report in this field. In the 15th century, Leonardo da Vinci already drew sketches of various types of gear system though manufacturing technology had not been enough developed then to realize them. After the Industrial Revolution, gear has been adopted various industrial machines because of the simplicity and reliability together with the improvement of manufacturing technology. Nowadays gear is an indispensable machine element to almost all machines, yet still it is well known it causes noise and vibration more or less. The mechanism of vibration and noise of gear system is shown from a couple of view points in this paper, and it is shown that the ignorance of this effect may cause a serious damage to industrial machines.

Key words: Gear, Vibration, Noise, Coupled Vibration, Torsional Vibration, Gear System

1. はじめに

歯車の原型は紀元前から使用されておりその歴史的背景・起源は古い。紀元前 150~100 年頃に製作されたとされるアンティキティラ島の計算機械にすでに使用例が見られる。そして 15 世紀には、レオナルドダビンチが現在のさまざまな歯車の基礎となるスケッチを残している。しかし、歯車の実用的価値を飛躍的に高めたのは 18 世紀後半の産業革命であろう。簡単に回転方向や伝達力を変換できる要素として歯車の需要が飛躍的に増加した。工作機械・加工技術の発達によって種々の歯車が実用的に供給されるようになった影響も大きい。

その一方で歯車は物理的に 2 つの要素が接触しながら動力を伝達するために、振動や騒音が発生する要素としても知られている。歯車の振動・騒音に関する研究は 1950 年代後半から始められ、多くの報告例があるが、まだ完全にすべての問題が解決されているとはいえない。

本報告では歯車の振動・騒音問題について最近の成果も含め従来の研究をいくつかの視点から整理して展

望し、あわせて残された問題点についても触れることとする。なお、文献からの図表の引用にあたっては、原典文献番号（著者らの未発表データについては単に [※] と表示）を示すとともに、内容をそこねない範囲で見やすく軸などの書き換えを行った。しかし、測定方法や発表年代により、必ずしも表記に統一がとれていない点があることをあらかじめご理解いただきたい。

2. 振動・騒音源としての歯車

2.1 歯車の特徴 歯車の振動騒音のメカニズムについて説明する前に、それらと関連する歯車の特徴について整理しておく。

(1) 歯車の長所と短所

歯車の長所・短所を簡単に列記すると次のようになる。これらの特徴と振動・騒音との関係については後述する。

[長所]

・構造が簡単であり、容易にトルクや回転を伝えることができる

*職業能力開発総合大学校 機械制御システム工学科

Dept. of Mechanical Engineering and Control, PTU

- ・任意のトルクを伝えることができる（必要な大きさに変換できる）
- ・任意の方向、速度で回転を伝えることができる（必要な速度、回転方向に変換できる）

〔短所〕

- ・歯面同士が直接接して回転するので、磨耗や疲労が生じる
- ・物理的な歯の接触により、正常な状態でも振動や騒音が発生する

(2) 歯形曲線（インボリュート曲線）

現在、歯形曲線として広く作用されているのはインボリュート曲線である。インボリュート曲線とは図1に示すように円（基礎円）に巻きつけた糸をぴんと張った状態でほどいていくとき、糸の端点が描く軌跡（伸開線）をいう。この曲線上では曲線に垂直な作用力は、必ず基礎円に接する方向に働く。したがってインボリュート曲線を採用した歯形では、歯先・歯元に関係なく歯面上のどの位置で法線上に力が働いても必ず2つの歯車の基礎円を結んだ線にかみあい点が存在するのが特徴である（図2）。歯車は、同時にかみあう歯数が時間的に変換し、平歯車では1対→2対→1対と変化するがそのような場合でもインボリュート曲線であれば常に基礎円の接線方向に動力が伝達される。そのため少々のミスアライメントや荷重などにより軸中心位置にずれが生じて、確実に回転方向に動力伝達を維持できる特徴がある。

2.2 歯車が潜在的に持つ振動・騒音原因 以上の歯車の特徴をふまえて、歯車軸系が潜在的にどのような振動・騒音原因を持つかを図示したのが図3である。それぞれについて簡単に説明すると以下ようになる。

- ・作用力は軸に対して、横荷重+回転荷重（トルク）として働く
- 作用力の変動は横振動（軸の曲げ振動）と回転振動が連成したものとなって現れる
- ・がた（バックラッシュ）がある
- 荷重変動により歯面が分離する可能性がある、「がた」を含む系となる
- ・歯車は回転円板でもある
- 不釣り合い振動やジャイロ効果、さらには円板としての振動が生じる可能性がある

- ・同時にかみあい歯数が時間的に変動する
- 歯1枚当たりの荷重が時間的に変換し、たわみが変動する
- ・軸から見るとかみあい線方向は拘束があるが、すべり線方向は相対的に自由である
- 剛性に異方性があるのと同じような現象が生じる
- ・相手側の軸振動がこちら側にも現れる
- 軸回転に同期する振動成分については、各歯車軸の振動成分が同時に現れる

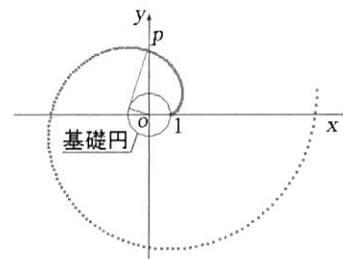


図1 インボリュート曲線

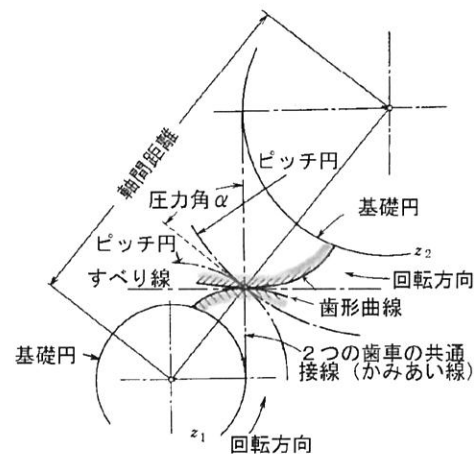


図2 インボリュート歯車のかみあい

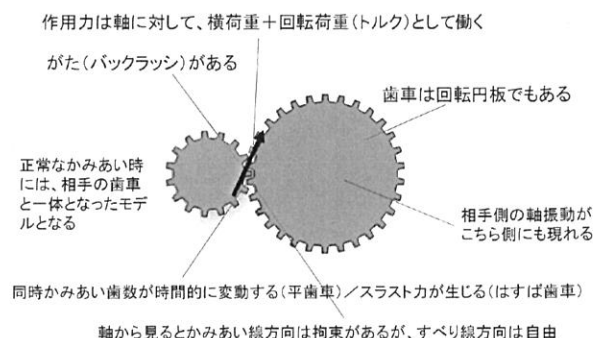


図3 歯車が潜在的に持つ振動・騒音原因

・正常な噛みあい時には、相手の歯車と一体となったモデルとなる

→相手の軸の物理的特性(質量や慣性モーメントなど)がこちらの軸も含めた全体の動特性に影響を与える

2.3 歯車のモデル化 振動・騒音解析のために歯車をモデル化するとき、前節で示した特徴をすべて考慮するのは逆に焦点が曖昧となり実用的とはいえない。

そこで実際の研究例では次のようにねらいをしばったモデルを設定し、問題点の明確化を行っている。

- (1) 軸は剛(または無拘束)と考え、歯車の歯のたわみに着目したモデル: 歯の等価剛性が変化する係数励振モデルとして動特性を検討する
- (2) 歯車単体は剛と考え、軸の曲げやねじりを考慮したモデル: 歯車という機構要素が軸振動特性に与える影響を検討する
- (3) バックラッシュをガタととらえた解析モデル: ガタのある振動系の一種として扱う

主要な視点としては上記の3つが代表的である。そこで次節で研究の発展の流れを簡単に説明した後に次章以降で、これらのモデルを中心に必要に応じて補足を加えながら展望してゆくこととする。

2.4 歯車の振動・騒音研究の流れ 歯車の振動・騒音分野における研究の発展の流れを箇条書きで示すと次のようになる。

- ・1950～1970 年代 騒音と潤滑や歯形誤差などの各種パラメータとの関係追求^{[1]～[3]}
- ・1960～1970 年代 歯のかみあいによる係数励振振動・騒音に関する研究^{[4]～[7]}
- ・1970～1980 年代 歯車軸の曲げ・ねじり連成系としての振動^{[8]～[11]}
- ・1970～1980 年代 歯車継手、遊星歯車などバックラッシュを含む歯車関連振動^{[12] [13]}
- ・1990 年代 歯車を含む系の軸受安定性、はすば歯車など、複合的モデルの振動^[14]
- ・2000 年代 歯車の異常検出、診断手法^[15]
- ・2000 年代 プラスチック歯車の振動・騒音^{[16] [17]}

3. 歯のかみあいによる係数励振振動

3.1 歯の係数励振振動 本章では歯車軸の振動は無視し、歯のたわみ振動に着目する。

歯車では次々と歯がかみあって動力・回転を伝えている。図4に示すように、噛みあっている歯数は時間的に変動し、平歯車であれば1対のかみあい状態と2対のかみあい状態を繰り返す。そのため動力を伝達するかみあい線方向で見ると、伝達荷重を1対のかみあいで受ける状態と2対の状態を受ける状態を交互に繰り返すこととなる(この値は、「同時噛みあい歯数」あるいは「歯の同時噛みあい数」と呼ばれている)。このことは、噛みあい線方向に関して歯の等価剛性が時間的に変化することを意味する。またピッチ誤差や歯形誤差などの誤差が存在すると、噛みあいを通じて噛みあい線方向に強制変位を与える効果をもたらす、加振原因となる。これらが振動・騒音にどのように影響するのか考察する。

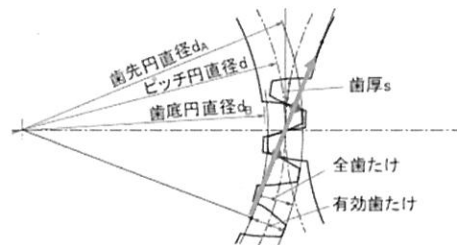


図4 歯のかみあい線と同時噛みあい歯数

3.2 係数励振振動発生メカニズム 歯車の歯の曲面はインボリュート曲線で構成されており、先端に頂点を持つ。この特殊な形状に対して種々の剛性計算式が提案されている^[18]。歯1枚で考えても、歯先の剛性に比べ歯元の剛性は高い。そのため噛みあいによる接触点移動(歯元～歯先)にともない噛みあい線方向の剛性は変化する。しかも噛みあい線上に存在する同時噛みあいの歯数は時間的に変動し、平歯車であれば1～2となる。

図5に会田ら^[4]による、回転時の噛みあい線方向の剛性の時間的変動を求めた計算例を示す。2対かみあいの領域では伝達荷重が2つの噛みあい部に分散されるため等価的な剛性は増加するが、噛みあいの位置の影響で1対かみあいの場合の2倍とはならない。ま

た1対(または2対)のかみあい領域でもかみあいの位置により等価剛性が一定ではないことがわかる。

このように時間的に剛性が変化すると、荷重が一定でもつりあい点に変化し、結果として係数励振振動と呼ばれる振動を生じる。それを剛性が時間の関数であるとして一般式で表すと次のようになる。

$$M\ddot{x} + C\dot{x} + K(t)x = F \quad \cdots(1)$$

ここで、 M 、 C 、 K はそれぞれ質量、減衰、剛性行列、 x 、 F は変位、外力ベクトルである。

係数励振振動系では係数の変動振動数 f_c と振動系の固有振動数 f_{nj} ($j=1\sim$ 自由度)との関係で種々の特異な振動が発生することが知られている^[19]。代表的な振動現象をあげると次のようになる。

- ・ 分数調波振動 $f_c = nf_{nj}$
- ・ 超調波振動 $nf_c = f_{nj}$
- ・ 和差振動 $f_c = f_{nj} \pm f_{nk}$

ここで n は自然数。

歯車系でこれらがどのように現れるかは後述する。

一方、図6に示すように歯形誤差が存在すると、強制変位が生じる。歯の部分を一種のばねとしてモデル化しているので、歯形誤差は強制的に誤差の分だけばねを変形させる効果をもつ。そのため、時間の関数として歯形誤差 $e(t)$ を表すと、それによる加振力は式(1)の記号を用いて $K(t)e(t)$ となる。したがって、歯形誤差を考慮すると運動方程式(1)は(2)のように拡張される。ピッチ誤差についても同様の扱いが可能である。

$$M\ddot{x} + C\dot{x} + K(t)x = F + K(t)e(t) \quad \cdots(2)$$

3.3 歯のかみあいによる係数励振振動解析結果

会田ら^[4]の研究報告を中心に係数励振振動系の解析結果について説明する。図7に実験装置の概略を示す。無響室内の十分柔い軸に取り付けられた一對の歯車があり、その円周方向加速度や歯元ひずみを測定、考察している。

(1) 円周方向の振動加速度と歯元ひずみ

図8に回転中の歯車の円周方向加速度と歯元ひずみの測定結果を横軸時間で示す。下の図は1枚の歯に着目した歯元ひずみの変化を示し、図中の2・1・2は同時かみあい歯数(対)を示している。その発生メカ

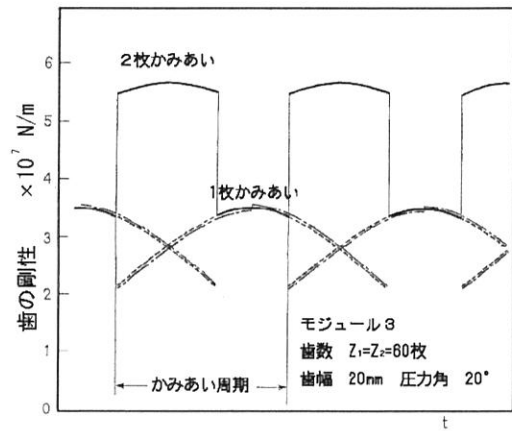


図5 かみあい線方向剛性の時間的変化計算例^[4]

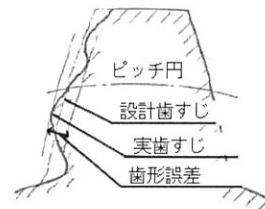


図6 歯形誤差曲線

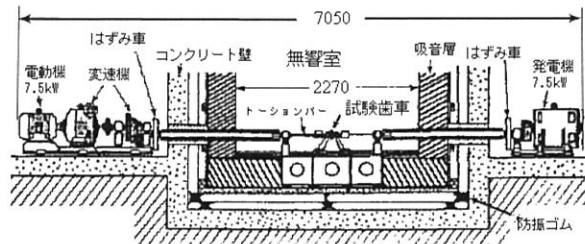


図7 かみあい振動実験装置^[4]

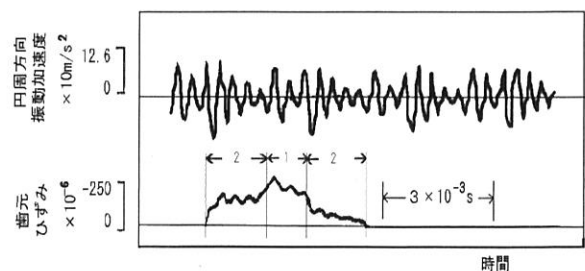


図8 円周方向振動加速度と歯元ひずみ測定結果^[4]

ニズムは次のように説明される：同時かみあい歯数が変化することにより歯に対して衝撃的な荷重が作用する→それにより歯の固有振動が発生し減衰してゆくが、次の同時かみあい歯数が変化する点で再び固有振動が励起される。

図8に対応する計算結果を図9に示す。同時かみあい歯数の変化により自由振動が励起され減衰してゆくようすが理解される。

このモデルでは、剛性の変化する周期は次の歯と重なる時間を考慮すると（周期＝最初の2枚かみあい領域＋1枚かみあい領域）となり、かみあい周期 T_z となる。このかみあい周期に含まれる自由振動の周期の数は回転速度とともに変化する。

図10に回転速度と振動・騒音との関係を調べた実験結果を示す。

2つの実験結果はまったく異なる実験装置、方法により測定されたものであるがいずれも同様の傾向を示す。すなわち、回転数の上昇とともに振動・騒音は増加するが単調増加ではなく極大極小をもちながら増加していることがわかる（振動と騒音の関係については後述するが密接な関係があることが確認されている）。これは次のように説明される。

回転数の増加とともに振動・騒音が増加する理由は単位時間あたりの歯1枚あたりの荷重変動ならびに歯形誤差による加振が増加することによる。図11に歯形誤差と騒音との関係を示すが、同一回転数でも歯車等級が低く歯形誤差が大きい場合には騒音が増加することがわかる。

一方、極大極小をもつ理由は次の通りである。回転中の同時かみあい歯数が変化する瞬間に荷重の急変によって固有振動が発生するが、その回転速度が変化すると2枚かみあい領域・1枚かみあい領域それぞれに含まれる自由振動の周期数が変化する（高速になれば含まれる周期数は減少する）。そのため回転数によっては、同時かみあい歯数が変化する瞬間にそれまでの振動が打ち消される場合もあれば、逆に成長する場合もある。そのため結果として、極大極小が生じると考えられる。すなわち剛性の変化する周期（かみあい周期）に固有振動が整数周期含まれる場合に振動が極大となる。これは先に示した係数励振振動の特徴である、超調波振動と考えられる。

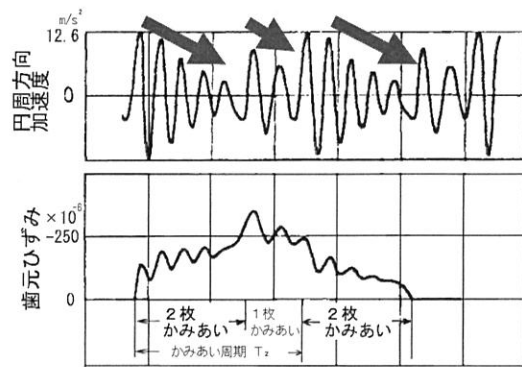
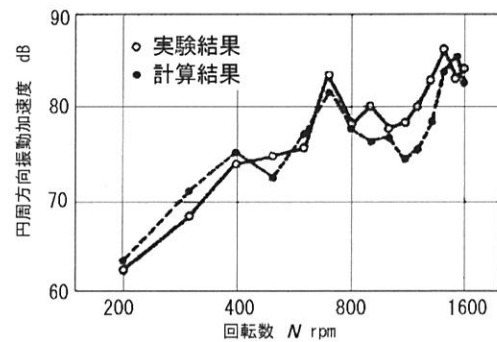
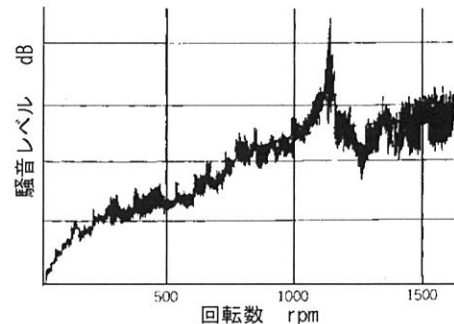


図9 円周方向振動加速度と歯元ひずみ計算結果^[4]



(a) 会田らの加速度測定・計算結果^[4]



(b) 小泉らの騒音測定結果^[3]

(原典に縦軸単位なし)

図10 回転速度と振動・騒音の関係

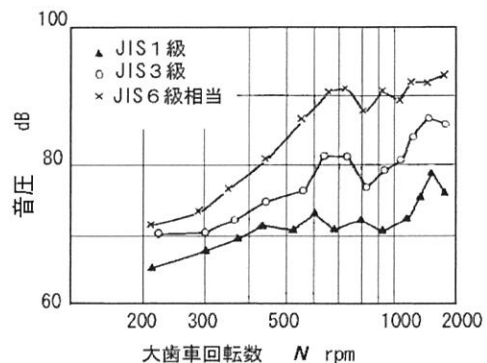


図11 歯車精度と騒音の関係^[4]

これらの例では「かみあい周期>固有周期」(その逆数の振動数で表せば、「かみあい振動数<固有振動数」)であり、振動成分としては固有振動数成分が主であった。しかし高速歯車では「かみあい周期<固有周期」(「かみあい振動数>固有振動数」)となることもあり、その場合には、かみあい振動数と固有振動数が近づく低速領域で振動が問題となる。

図12に著者が調査した、実機で発生した異常振動の例を示す。図(a)が軸回転数1488rpm、図(b)が1500rpmの測定結果である。速度差はわずかであるが、図(b)では大きな異常振動が発生している。この系の固有振動数は1962.5Hz、2887.5Hzであり、異常振動・騒音が発生した1500rpmにおけるかみあい振動数はこれらより高い4850Hzであった。

この例は、「剛性の変動振動数(この場合はかみあい振動数)＝複数の固有振動数の和または差」の条件を満足したときに発生する和差振動である。系の減衰が少ない場合に、図のように狭い速度領域で発生する。

力学としての係数励振モデルではこのほかに超調波振動 $nf_c = f_{nj}$ も存在しうるが歯車軸系では多くの場合高い振動数領域の議論となり、振動としてよりも騒音として観察される。

4. 歯車軸の曲げねじり連成振動

4.1 歯車軸系の振動連成 前章では歯のたわみに着目した解析を行ったが、本章では歯の剛性が十分高く、軸の弾性的挙動が問題となる系を扱う。

歯車軸系は静止時にはそれぞれの軸上の歯車をバックラッシュの範囲内で独立に動かすことが可能なため、互いの軸の挙動が独立であるとして扱われることがある。もちろんそれは誤りで、図13に示すようににねじり振動(角振動)だけを考慮してもかみあわせない状態(a)の固有振動数とかみあわせした場合(b)の固有振動数は拘束条件式の存在により異なったものとなる。つまり、全体が一体のモデルとして解析しなければならない。このことは軸の曲げ振動を考慮した場合でも同様である。

これから説明する、軸の曲げが無視できない系(曲げねじり連成系)ではさらに、曲げ振動に影響を与える要素がねじり振動にも影響する。

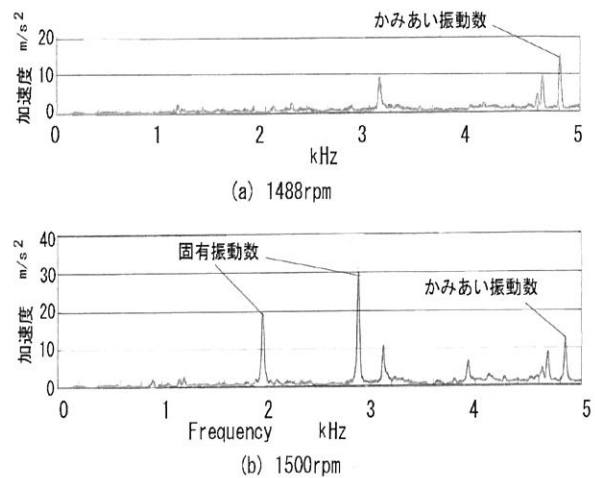


図12 歯車の和差振動の発生例 [88]

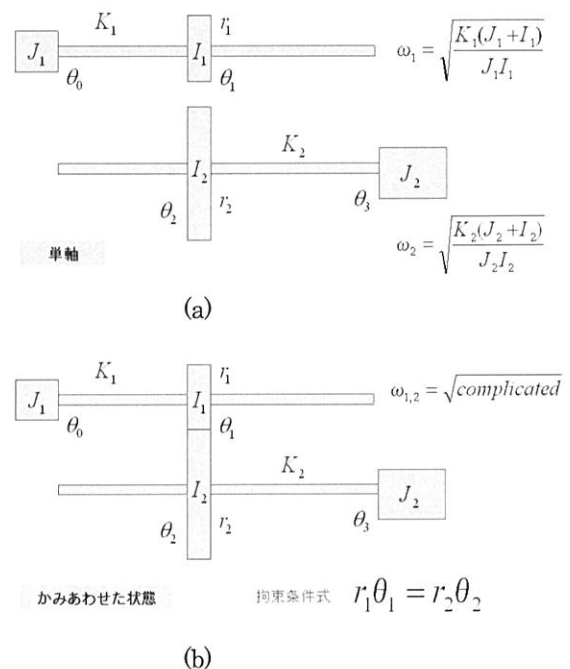


図13 かみあう歯車軸の扱い

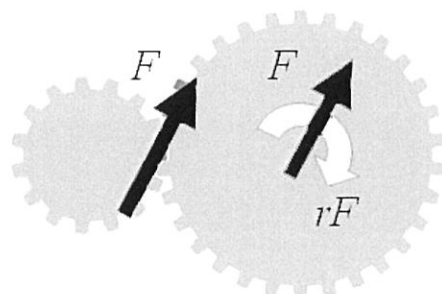


図14 曲げねじり連成振動の原理

4.2 歯車軸の曲げねじり連成

(1) 曲げねじり連成のメカニズム

インボリュート曲面を持つ歯車は、歯面垂直方向の作用力は必ず基礎円に接する方向に作用する。そのため、作用力が変動すると、図 14 に示すようにそれはトルク変動と曲げ方向力変動として軸に影響を与える。そのためねじり振動（角振動）とかみあい線方向（動力伝達方向）の曲げ振動が同時に発生する（連成する）のが特徴である。

(2) 簡易モデルによる曲げねじり連成の理解

1 対のかみあう歯車のうち、片方の歯車だけに着目し、その軸のねじり剛性 K 、曲げ剛性を k とした図 15 のような簡単なモデルを考える。簡単のため歯車のかみあい点（伝達力の作用点）は回転支点と考え変位はしない（空間固定）とする。

図において歯車の慣性モーメントを I 、質量を m 、軸の曲げ剛性を k 、ねじり剛性を K とする。図より明らかに角変位 θ と曲げ変位 y は従属関係となり基礎円半径 r_b を用いて次式が成り立つ。

$$r_b \theta + y = 0 \quad \dots\dots\dots(3)$$

したがってこの系は 1 自由度系となる。これらを用いて系の運動方程式と、固有角振動数を導くと次のようになる。

$$(I + mr_b^2)\ddot{\theta} + (K + kr_b^2)\theta = 0$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{K + kr_b^2}{I + mr_b^2}} \quad \dots\dots(4)$$

式(4)からも理解されるように曲げ振動（横振動）とねじり振動（角振動、回転振動）が同時に発生する（すなわち連成する）。そのため、質量がねじり振動の特性に、また慣性モーメントが曲げ振動の特性にそれぞれ影響を及ぼす。

これは一見不思議に見えるかもしれないが、図 16 に示す簡易モデルでの連成振動の概略イメージを見れば理解されるであろう。かみあい点を回転支点と見なせば、軸心は円弧状の軌跡を描く。これは分解すれば右端に示すように、軸心に曲げ振動とねじり振動が同時に発生して行っていることを意味する。

(3) 二軸平歯車系への拡張

簡易モデルの考え方を 2 軸からなる平歯車系に拡張してみる。曲げおよび幾何学的偏心を考慮しない場合には、一対の歯車のかみあいにおける拘束条件式はそれぞれのかみあい線方向の角変位が等しいことから図 13 に示したように式(5)のようになる。

$$r_{b1}\theta_1 = r_{b2}\theta_2 \quad \dots\dots(5)$$

ここで添字 1, 2 はそれぞれ駆動側、従動側を表す。

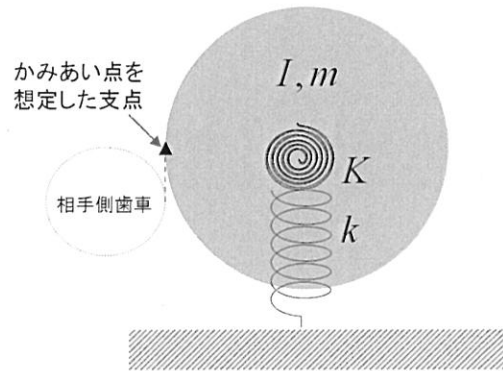


図 15 曲げねじり連成簡易モデル



図 16 曲げねじり連成振動のイメージ

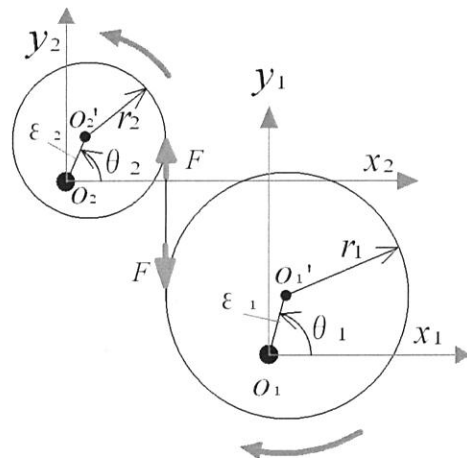


図 17 二軸平歯車軸系の幾何学的関係

曲げおよび幾何学的偏心を考慮する場合には図 17 に示すように、これにかみあい線方向のそれぞれの軸中心 O の曲げ変位 y および幾何学的偏心 ε の影響を含めればよい。幾何学的偏心方向の初期変位を記号 α とすると、式(6)のようになる。なお図 17 では煩雑さを避けるためいずれの歯車においても $\alpha=0$ として図示している。

$$\begin{aligned} r_{b1}\theta_1 + y_1 + \varepsilon_1 \sin(\theta_1 + \alpha_1) \\ = r_{b2}\theta_2 + y_2 + \varepsilon_2 \sin(\theta_2 + \alpha_2) \\ \dots\dots(6) \end{aligned}$$

(4)軸振動の加振源

このモデルにおける軸振動の加振源としては以下のものがあげられる。

①歯車の幾何学的偏心

図 18 に駆動軸側に幾何学的偏心（不釣り合い（質量の偏り）とは異なる）がある例を示す。このような場合、駆動軸側の回転速度が一定であっても、軸中心からかみあい点までの距離が変化するために、伝達する回転速度が変動し、1回転に1回の角速度変動を引き起こす。従動軸側に幾何学的偏心がある場合も同様である。

②歯車の偏重心

幾何学的にも真円であっても、質量の偏りがあれば回転にともない遠心力が発生する。つまり不釣り合いによる遠心力が軸の回転同期の曲げ振動を引き起こす。

③負荷変動（トルク変動）

入力または出力トルクが変動すると歯面伝達力が変化するため、先に説明したメカニズムにより、回転振動や曲げ振動を引き起こす。

4.3 曲げねじり連成振動解析結果

(1)実験装置と測定方法

使用した実験装置の概略を図 19 に示す。一對の平歯車からなる歯車軸系で、駆動軸が剛、従動軸が柔と見なせる構造となっている。測定は軸の曲げ振動を直角な2方向（かみあい線＝動力伝達線方向とすべり線方向）から非接触式変位計を用いて行った。

(2)曲げねじり連成振動の確認

実験では軸振動の曲げ変位を測定したが、それが曲

げねじり連成振動であることを確認するために、一般的にねじり振動に影響を与えると考えられる要素の値を変化させてその影響を確認した。図 20 に歯車軸系の慣性モーメントとねじり剛性を変化させた場合の危険速度の測定結果ならびに計算結果を示す。なお、実験においては慣性モーメントやねじり剛性が変化してもそれ以外のパラメータ値（歯車の等価質量など）が変化しないように設定した。

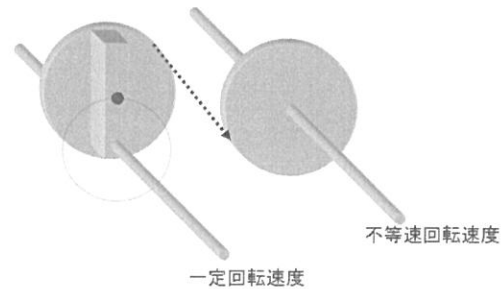
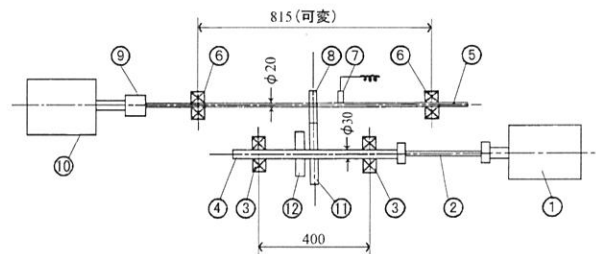


図 18 歯車の幾何学的偏心による加振



- | | |
|-----------------|--------------------------|
| 1. モーター | 7. 単列深溝玉軸受 |
| 2. フレキシブルカップリング | 8. 歯車 II ($m=4, z=30$) |
| 3. 単列深溝玉軸受 | 9. カップリング |
| 4. 軸 I | 10. 負荷装置(ダイナモ) |
| 5. 軸 II | 11. 歯車 I ($m=4, z=54$) |
| 6. 単列深溝玉軸受 | 12. フライホイール |

図 19 曲げねじり連成振動実験装置 [7]

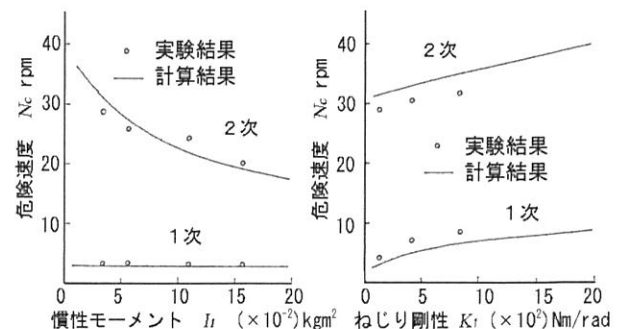


図 20 パラメータの変化による固有値の変化 [7]

図から慣性モーメント、ねじり剛性のいずれを変化させても曲げ振動に影響をおよぼすことが認められる。このことから実験的・理論的に歯車軸系が曲げねじり連成振動系であることが確認される。

図 21 に回転数を変化させたときの従動軸のかみあい線方向振動の応答変化を示す。図より、歯車をかみあわせない場合には 38Hz にあったかみあい線方向の危険速度によるピークが、かみあわせることにより低下している。しかも曲げ振動を測定しているにもかかわらず、駆動軸側の慣性モーメントの値によって危険速度（固有振動数）が変化していることがわかる。

このように歯車軸系では、たとえ曲げ振動に着目する場合でも、曲げねじり連成振動として回転運動を考慮した解析を行わなければならない。

(3)幾何学的偏心の加振効果

このモデルでは加振源のひとつとして、歯車の幾何学的偏心有ることを示した。回転体では軸回転に同期した振動の対策としておもりを付加する、つりあわせ作業が行われる。そこで幾何学的偏心により回転同期振動が生じている歯車軸系につりあわせを行うとどうなるかを検討したのが図 22 である。25rps 付近の振動を低減するように最適な方向 (π) におもりを付加すると、78rps 付近の振動が逆に増大している。一方、78rps 付近の振動を低減させた場合 (0) には 25rps 付近の振動は逆に増大する。これは幾何学的偏心による加振効果と、おもりによる遠心力効果の特性が異なるためである。したがって幾何学的偏心による振動が生じているときにはつりあわせ作業を行っても全速度全域で振動を低減させることはできない。

(4)かみあい線方向の振動とすべり線方向の振動

ここまで示してきたように、かみあい線方向の曲げ振動はねじり振動と連成し回転要素の影響も受ける。しかしかみあい線方向と直角な方向であるすべり線方向は、近似的にはかみあい線方向と独立と見なせる。そのような示したのが図 23 である。

すべり線方向の危険速度はかみあわせてもほとんど変化せず 38rps のままである。それに対して、かみあい線方向の危険速度は、この例では 9 rps と 30rps となっている。すなわち、かみあい線方向はかみあいを

通じて運動に拘束が働くのに対して、すべり線方向は比較的自由であるためこのような結果となっている。

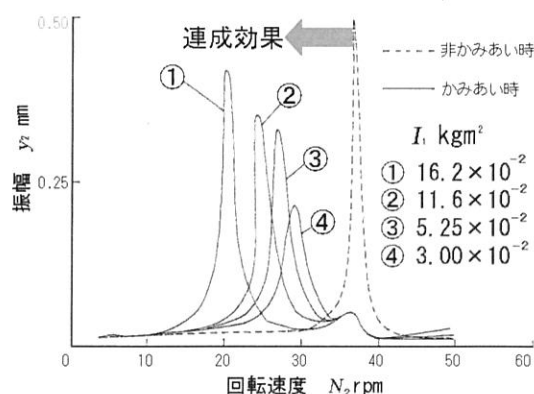


図 21 かみあい線方向の振動応答 [7]

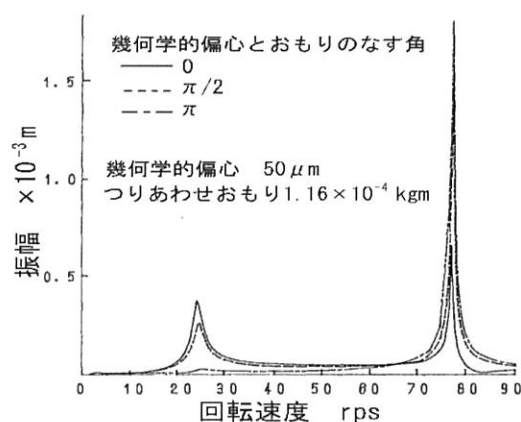


図 22 幾何学的偏心につりあわせおもりを付加した系の応答（計算結果）[7]

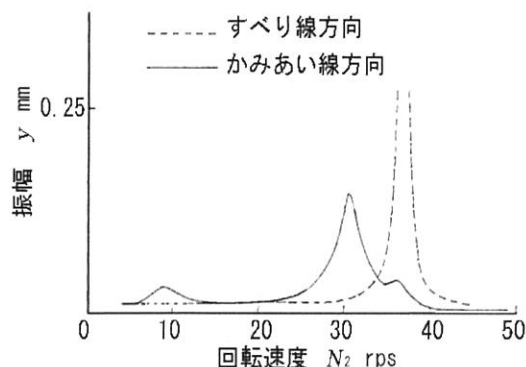


図 23 かみあい線方向とすべり線方向の振動応答の比較（実験結果）[7]

これを回転軸の軸心の軌跡で観察したものが図 24 である。図(a)がかみあい線方向の振動が大きくなる危険速度における軸心軌跡を、図(b)がすべり線方向の振動が大きくなる危険速度における軸心軌跡を示す。いずれもそれぞれの方向に大きく振動していることがわかる。なお、これは図 19 とは異なる諸元の実験装置で得られた結果であるが、一般的に歯車軸系の曲げ振動ではこのような軌跡となる。

かみあい線方向とすべり線方向とで挙動が異なるという特徴は、特に回転方向が変化する場合に問題となる。それは同じ 1 対のかみあっている歯車であっても、どちらが駆動側かまたどの方向に回転しているかによってかみあい線方向・すべり線方向が空間的に変化するからである。それを示したのが図 25 である。

図は駆動軸（原動軸）／従動軸、回転方向により 1 対のかみあいにおけるかみあい線方向を分類したものである。同じ歯車の組み合わせであっても、条件によって矢印で示すかみあい線方向が変化する。

図 26 には回転方向は異なるがそれ以外は同一条件で運転したときの軸心の軌跡の例を示す。圧力角 20° の一般的な平歯車では回転方向が逆になると図のように振動方向が 40° 変化する。

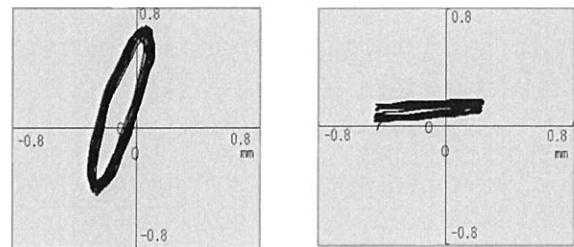
(5)加振源に起因する複数の振動成分

かみあい線方向の振動に議論を戻す。かみあい線方向の曲げおよびねじり振動は先に説明したように、歯車の幾何学的偏心や偏重心（ふつりあい）によって引き起こされる。これらは通常は一般にかみあっている歯車のどちらにも存在し、それぞれの軸の回転に同期した振動を引き起こす。

つまり 1 組のかみあいの結果、生じる振動には駆動軸、従動軸それぞれの回転に同期した 2 つの振動成分が存在することとなる。そのため、もしそれぞれの軸回転数が比較的近づけばうなりを生じる可能性がある。

図 27 にその数値シミュレーション例を示す。この例はそれぞれの軸回転数が 37rps, 36rps の場合であり、それぞれの軸から発生する軸振動同期成分は 37Hz, 36Hz となる。それらが重畳すると 36.5Hz の振動成分を 0.5Hz で振幅変調(包絡線が 0.5Hz)した波形となり、うなり現象を生じて回転数よりはるかに低い振動を示す。

4.4 多軸歯車系の軸振動 前節までは一対の歯車からなる歯車軸系を取り上げてきたが、図 28 のように一つの軸上に、複数の歯車かみあいを持つ軸系（ここでは多軸歯車系と総称する）ではより挙動が複雑となる。



(a) かみあい線方向

(b) すべり線方向

図 24 それぞれの危険速度における軸心の軌跡[※]

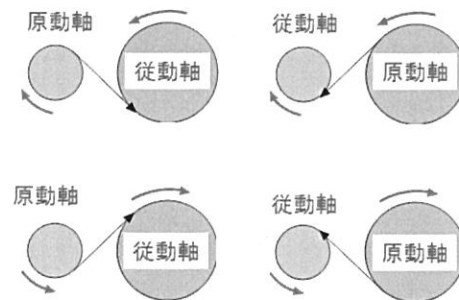
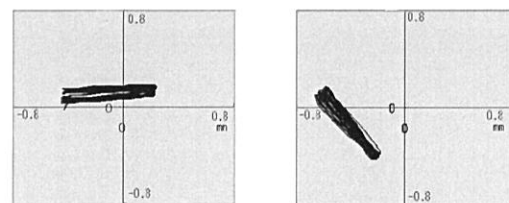


図 25 運転条件によるかみあい線方向の変化



(a) 正転時

(b) 逆転時

図 26 軸心の軌跡の回転方向による変化[※]

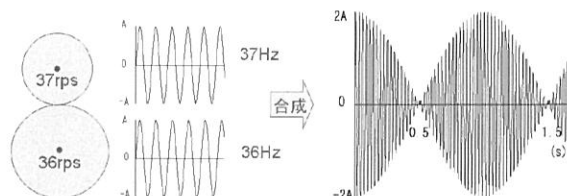


図 27 2つの歯車軸回転速度が近接している場合のうなり現象計算結果（2振動成分の振幅が等しい場合）[※]

先に説明したように、かみあい線方向とすべり線方向では等価な剛性が異なる。そこで、1 軸上に複数の歯車かみあいをもつモデルについて、かみあい線方向に拘束を表すばねを挿入したイメージは図 29 のようになる。この図から理解されるように、多軸歯車系では 1 軸上に複数のかみあいが存在し、そのなす角度によって動特性が変化する可能性がある。

その検証のため図 30 に示す実験装置を用いて、図 31 に示す、一軸上の二つのかみあい線方向がなす角 α と危険速度（固有振動数）の関係調べた結果を図 32 に示す。

図から α により危険速度が大きく変化することがわかる。歯車軸系のかみあい線方向は回転方向やどちらが駆動軸かによって変化することをすでに示したが、多軸歯車系ではその影響がより著しいものとなる。図 33 に正転時に一軸上の二つのかみあい線方向が等しい ($\alpha = 0$) モデルで、逆回転させたときにかみあい線方向がどうなるかを示したものである。かみあい線方向のなす角度 α は大きく変化し、図 32 を参照すると大きく動特性が変化することがわかる。

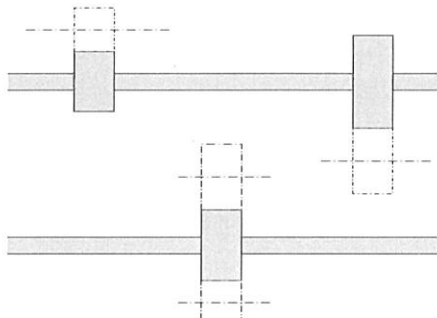


図 28 多軸歯車系

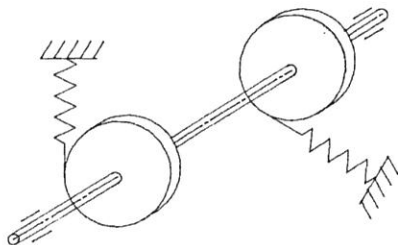
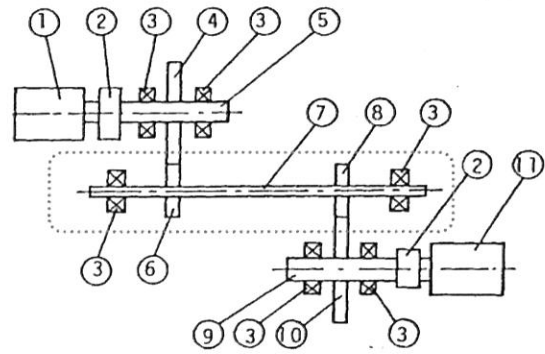


図 29 複数のかみあいを持つ軸のイメージ



- | | |
|-------------------------------|---------------------------------|
| 1. モーター | 7. 軸 II ($\phi=20\text{mm}$) |
| 2. 剛体カップリング | 8. 歯車 III ($z_3=30$) |
| 3. 玉軸受 | 9. 軸 III ($\phi=30\text{mm}$) |
| 4. 歯車 I ($z_1=53$) | 10. 歯車 IV ($z_4=54$) |
| 5. 軸 I ($\phi=30\text{mm}$) | 11. 負荷装置 |
| 6. 歯車 II ($z_2=30$) | |

図 30 多軸歯車系実験装置 [10]

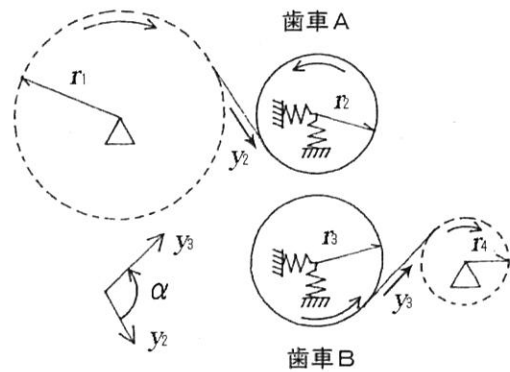


図 31 中間歯車軸の 2 つのかみあい線の関係

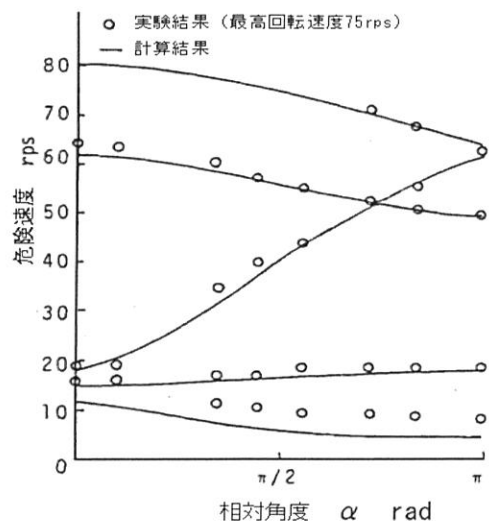


図 32 2 つのかみあい線のなす角度と危険速度の関係 [10]

4.5 産業用機器における曲げねじり連成振動 産業用機器の歯車軸は剛性が高く、あえて曲げ振動を論じる必要がないように見える系も多い。実際、曲げねじり連成を考慮したモデルと、考慮しないモデルの固有振動数はほとんど同じとなることも多い。しかし現実的な意味は大きく異なる。

今、曲げねじり連成を考慮したモデルで、固有振動数が f_1, f_2, f_3 となったとしよう。一方、曲げねじり連成を考慮しないモデルと仮定して解析を行い、ねじり振動の固有振動数が f_1, f_3 、曲げ振動の固有振動数が f_2 となったとする。

この場合、固有振動数だけで見ると違いは見られない。しかし実際には、ねじり振動の共振振動数 f_1, f_3 で曲げ振動が発生し、また曲げ振動の共振振動数 f_2 でねじり振動が発生する。連成を考慮しない場合には、この点を見落とすわけで影響は大きい。

さらにすべり軸受を使用している軸系では、その動特性は軸受油膜の厚さに大きく影響される(図34)。軸受油膜は荷重の大きさと方向の影響を受けるので、かみあい線方向の荷重を正しく評価することが重要である。

日本機械学会振動問題データベース(v-Base)には、ほとんど影響がないと判断して曲げねじり連成を無視したために予期せぬ異常振動や軸受トラブルが発生した例がいくつか報告されている。

5. 歯面分離振動

5.1 歯面の分離現象 歯車では振動が増加すると、歯面の接触が維持できなくなり歯面が分離して、特異な挙動を示す。本章ではこの問題の基本的な考え方と、具体例を示し考察する。

5.2 歯車のがた(バックラッシュ) 歯車をかみあわせる際には歯車の熱膨張やミスアライメントの影響を回避するため歯面間にわずかな遊び(空隙)を設ける。これをバックラッシュという。通常は一定の伝達トルクによって歯面は押さえつけられているが、振動による動荷重がそれよりも大きくなると、2つの作用力の合力が負となったときに分離する(図35)。すなわち歯

面の接触維持の条件は歯面に作用する合力が常に正であることとなる。

図36に歯面分離発生時の軸振動測定結果を示す。接触中はほぼ回転に同期した振動波形となるが、分離するとそれぞれの軸が独立した自由振動を始めるため異なった振動周期となっていることがわかる。

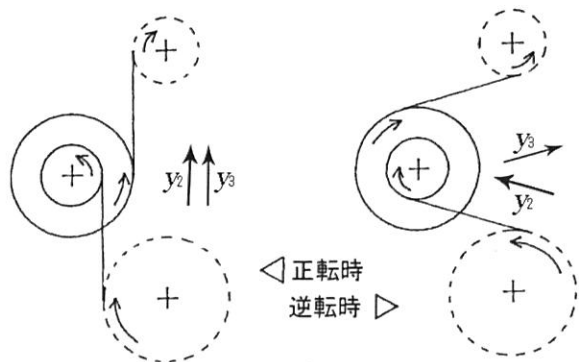


図33 正転時と逆回転時の2つのかみあい線の関係

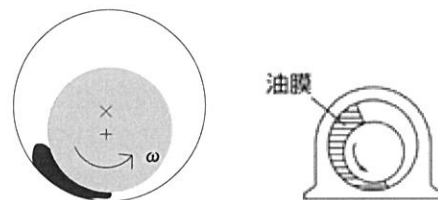


図34 すべり軸受の油膜

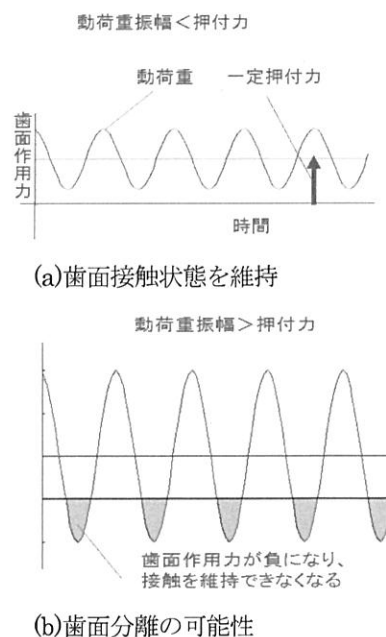


図35 静荷重と動荷重の関係による歯面分離条件

図 37 には高速度カメラで撮影した平歯車における歯面分離の瞬間を示す。やや不鮮明ではあるが、図で右下の歯車から時計回りに駆動しているにもかかわらず、矢印で示すかみあい部分にすきまが生じており、歯面分離が発生していることがわかる。

5.3 歯面分離の可能性のある系 このような歯面分離現象が生じやすい歯車系としては以下のような系があげられる。

- ・ 紡績機械などの低負荷高速回転の系
- ・ 負荷変動が大きい系(過渡的な変動も含む)
 - リンクやカム軸に接続された歯車
 - クラッチ軸に接続された歯車
- ・ 歯形誤差の大きい歯車系
- ・ 遊星歯車機構や歯車継手のように空間的に浮いた歯車要素をもつ系

5.4 歯面分離現象のモデル化と基礎的検討 このように歯面が分離する系を単純化して表現したモデルが図 38 である。図の左のように接触時には一体となり、分離時には等価質量・剛性が低下する非線形モデルとなる。そして接触点の変位したときのそれぞれのばねの変形量を δ_1, δ_2 で表すとき、復元力の差 $(k_1\delta_1 - k_2\delta_2)$ の絶対値が押しつけ力より(分離する方向に)大きくなれば歯面が分離する。

このようなモデルは非線形問題におけるソフトばね系(変位が増加すると剛性が小さくなる系)の一種と考えられる。図 39 に一般的なソフトばね系の、強制力に対する応答曲線を示す。左側が数値解であり、実際の挙動としては右側に矢印で示すようになる。すなわち加振振動数上昇時に振幅が増大する(図の点 e → f) 振動数と、振動数減少時に振幅が減少する(図の点 b → c) 振動数が異なる跳躍現象と呼ばれる挙動を示す。減衰が弱い場合にこの現象は顕著となる。

この跳躍現象であるが、歯車を往復回転運動させてバックラッシュの影響を強調させるような実験^[13]を行ったような場合を除き通常、歯車軸系ではあまり問題とはならない。その理由として歯車系では仮に跳躍現象が生じるような特性を持つ系でもそれが問題となる条件で運転されることが少ないこと、また歯面分離が生じてバックラッシュの量が大きくない限りすぐに裏

歯で接触し運動が拘束されることがあげられる。ただ、歯面分離が生じると、引き続いて歯の衝突が生じ、衝撃的な動荷重が作用する可能性がある。したがって好

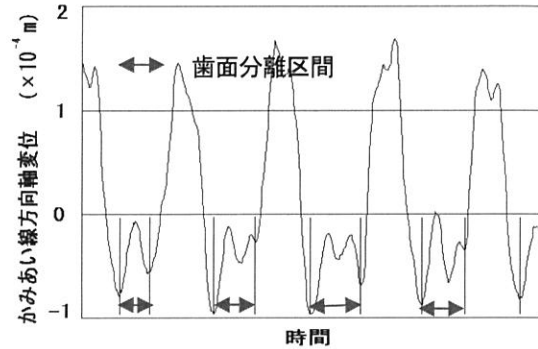


図 36 歯面分離状態の挙動測定結果^[8]

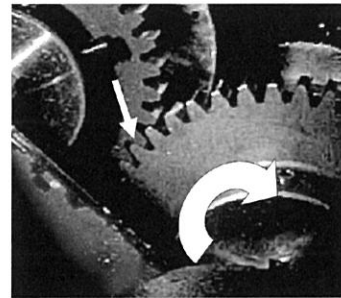


図 37 歯面分離の瞬間(下側が駆動軸)^[8]

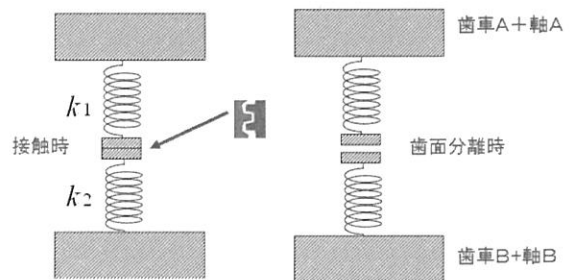
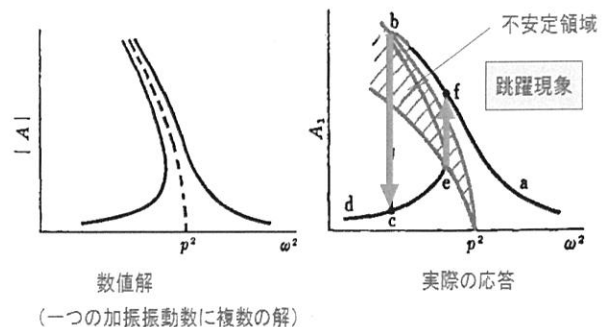


図 38 歯面分離現象のモデル化



(一つの加振振動数に複数の解)

図 39 ソフトばね系の一般的な挙動

ましい状態とはいえない。また、もし歯車系で跳躍現象が観察されたなら、その原因の一つとして歯面分離が疑われる。

図 40 に二軸歯車系で伝達トルクを変化させたときの応答曲線を示す。伝達トルクが小さい場合には危険速度付近で歯面分離・衝突が生じて見かけの振幅は小さくなっていることがわかる。軸心の軌跡を観察するとトルクが小さい場合には歯面分離により乱れた軌跡となるが、大きくなると安定した軌跡を描く。

なお、バックラッシュそのものが原因ではないが、歯車軸系における類似の現象が発生する例として歯車を固定するキーのはめあいが不適切な場合があげられる。この場合も、モデルとしては、「がた」のある系となる。したがって同様の現象（トルクによる挙動の変化、速度上昇時と下降時との応答の変化）が現れることがある。

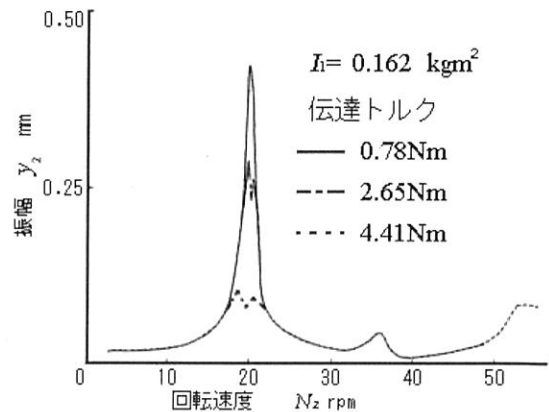


図 40 トルクによる歯面分離現象の変化 [8]

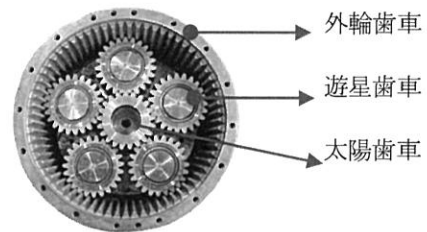


図 41 遊星歯車機構の例 [20]

5.5 遊星歯車装置の歯面分離振動 歯面分離が生じやすく、実際に特異な振動が観察された例として遊星歯車装置をとりあげる [12]。

遊星歯車機構の特徴は少ない段数で大きな減速比が得られる、大きなトルクが伝達できる、入力軸と出力軸を同軸上に配置できるなどであり広く産業機械で使用されている。図 41 にその例を示す。図に示すように遊星歯車装置は、外輪歯車、遊星歯車、太陽歯車から構成される。そして使用法によりそのいずれかが拘束のない「浮いている」状態となり、がたの影響を受けやすい。特に負荷が少ない場合、歯面が分離しやすく支持条件によっては太陽歯車の挙動に大きな影響を与える可能性がある。一端が太陽歯車、一端が継手の軸受を持たない軸で特異な振動が発生した例を以下に示す。

図 42 に示すような 1 段スター型遊星歯車増速機系（遊星歯車は公転しない）で遊星歯車は 3 個の系である。出力軸に接続された太陽歯車が浮いており、遊星歯車回転数の 3 倍振動成分で、太陽歯車軸に異常振動が発生した。また振動は曲げ（横）ねじり連成振動で、応答は跳躍現象を示した。図 43 に問題となる振動成分の速度応答を示す。速度上昇時と下降時とで挙動が異なる跳躍現象を示していることがわかる。また図 44 に示すようにトルクを増加させると異常振動の発生振

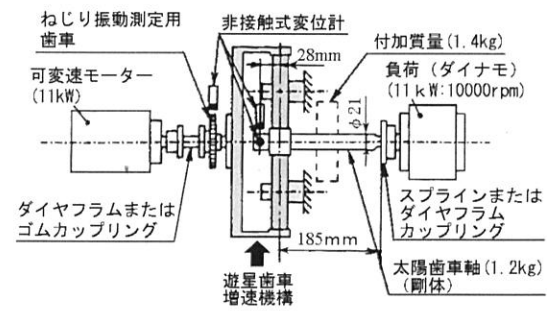


図 42 遊星歯車機構実験装置 [12]

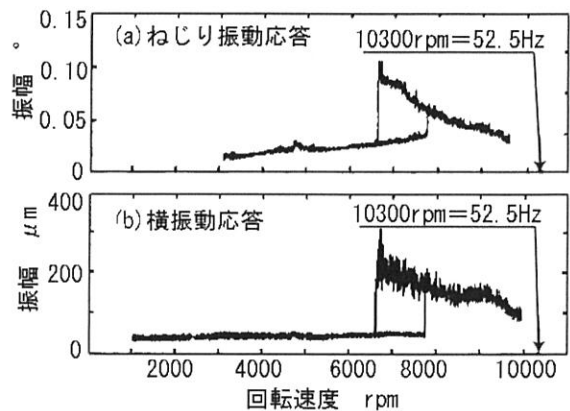


図 43 測定された曲げねじり連成跳躍現象 [12]

動数が変化した。

跳躍現象が観察されたこと、伝達トルクが増加すると、異常振動の現れる振動数が高くなったことなどから歯面分離の影響が疑われた。さらに遊星歯車回転数の3倍振動成分が検出されたのは、遊星歯車回転数×遊星歯車数によるものと推定された。

さらに詳細な考察を加えた結果、次のようなメカニズムによる振動が発生していることがわかった。遊星歯車機構では安定状態では太陽歯車は自立的に中心位置を保つ。しかし負荷が少ない場合に遊星歯車とかみあっている歯面が分離し、それにより「浮いている」太陽歯車は、遊星歯車で囲まれた空間に一瞬、自由落下し、遊星歯車のいずれかに衝突する。それを繰り返すことによりがたのある系（非線形系）の典型的な応答挙動を示す。この系は曲げねじり連成系であるため、ねじり振動に直接的に影響する出力軸と負荷の間の軸継手を変更し減衰特性を向上させたところ異常振動が消滅した。

6. 歯面間の摩擦の影響

6.1 歯面間の摩擦の考え方 歯面間の摩擦力は直接的には動力伝達方向と垂直な方向であるすべり線方向に影響を与える。そして1枚の歯に着目したときのかみあいによるすべり速度はかみあいを開始してから終了するまでの区間でピッチ点を境にして速度の向きが変化する。そのため摩擦力により発生する振動はかみあい振動数成分が支配的となる。なお、このメカニズムでは摩擦力は結果的に加振要因となるが、運転条件や加振原因によっては減衰として働くこともある。

6.2 歯面力の影響 図45に二軸歯車系で歯面力を変化させた際のすべり線方向振動の測定結果を示す。負荷が増加すると細かいかみあい振動数成分が増加していることがわかる。

6.3 摩擦係数の影響 摩擦係数を大きく変化させるねらいで同一負荷における無潤滑の状態と潤滑状態の振動比較を行った測定結果を図46に示す。無潤滑では摩擦の影響で、より顕著にかみあい振動数成分がすべり線方向に観察される。また、摩擦力は直接的にはすべり線方向に影響を与えるため、かみあい線方向の振動にはほとんど変化が見られないこともわかる。

7. その他の歯車軸系振動

7.1 歯車継手（ギヤカップリング）の振動 歯車を継手として用いたのが図47に示す歯車継手である。接続する2軸の間で少々のずれがあっても吸収できることから広く産業機械で用いられている。歯車継手の振動では次の3点が問題となる。

(1) バックラシの存在による歯面分離振動

歯車継手は遊星歯車と同じく「浮いた」要素を持つことから、歯面分離振動で説明した現象が観察される。

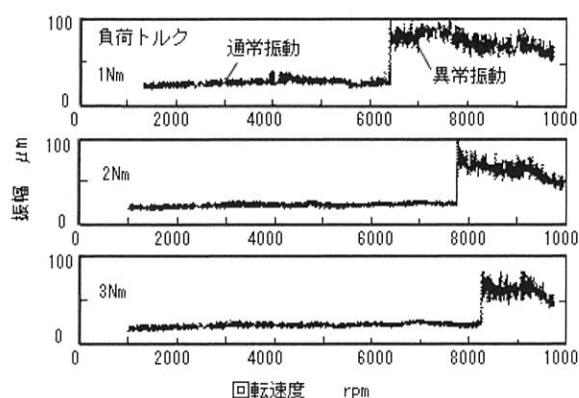


図44 トルクによる振動応答の変化^[12]

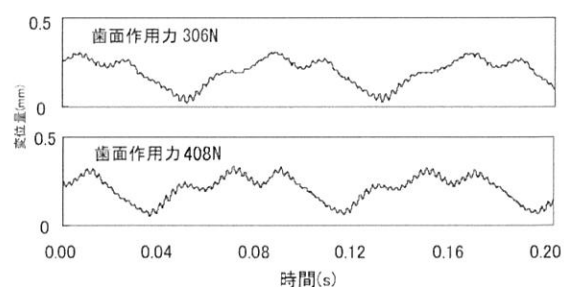
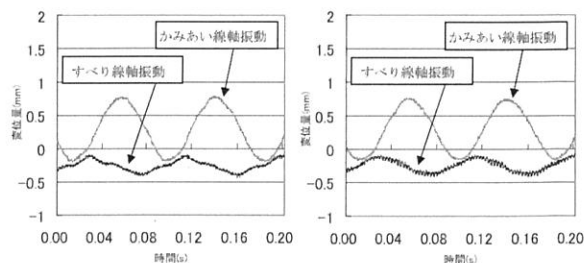


図45 歯面力のすべり線方向振動への影響測定^[28]



(a) 潤滑状態 (b) 無潤滑状態

図46 摩擦係数の振動への影響測定結果^[28]

(2) 過小な相対運動による振動

歯車継手は接続される2軸のずれを吸収する機構要素である。しかし一定速度で回転しているとき、2軸のずれがほとんどない場合には内歯歯車である浮動中間体と軸側歯車との間のかみあい点は相対的に動くことなく一体となって回転することになる。その結果、潤滑油膜の生成が阻害され歯面間の摩擦係数が増大する。そして何らかの原因で相対運動が生じると摩擦係数は急激に低下する。そのため、スラスト方向の抵抗増加やびびり振動など自励振動を生じる原因となる。

(3) 過大なミスアライメントによる振動

前項とは逆にミスアライメントが大きい場合には、図47の中央部にある浮動中間体がフラフープのように大きく振れ回る振動が発生する。そのため高速回転軸には歯車継手は適さない。

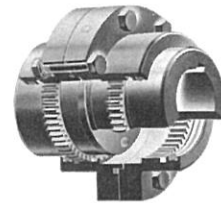


図47 歯車継手 [21]

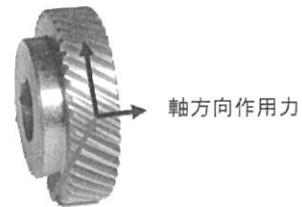


図48 はすば歯車の軸方向作用力

7.2 はすば歯車系の振動

(1) はすば歯車の軸方向振動

はすば歯車は同時かみあい歯数が多く、かみあい率を高くとれるので、滑らかな動力伝達が期待される。しかし、図48に示すように、軸方向に作用力が働く。そのため軸方向の振動要素の影響（振動連成）を場合によっては考慮する必要がある。図49に2軸からなるはすば歯車系で回転方向に変動力が作用した際の軸方向振動計算結果を示す^[14]。はすばのねじれ角度が大きくなるにつれて軸方向振動が増大し、また固有値も変化していることがわかる。同様の現象は傘歯車などでも生じる可能性がある。

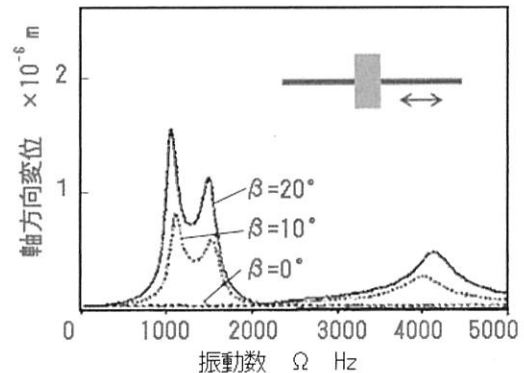


図49 回転方向加振に対する軸方向振動応答計算結果^[14]

(2) 歯車精度の影響

歯のねじれ角が大きいと同時かみあい歯数は増加するが、その一方でそれぞれのかみあいにおける歯形誤差の影響も受けやすくなる。図50に、精度の劣る歯車（JIS4級相当）で、歯車外径を一定にしたまま、ねじれ角を変化させた（したがって歯数も変化させている）場合の騒音測定結果を示す^[3]。一般的に同時かみあい歯数が増加すれば振動・騒音が低減するといわれているが、この例では歯形誤差が強調されて騒音が増加している。

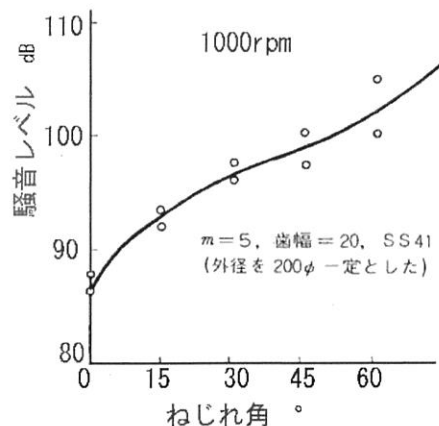


図50 ねじれ角と騒音レベルの関係^[3]

7.3 樹脂歯車を含む系の振動 近年、軽量化・自己潤滑性・大量生産性・低騒音などをねらいとして射出

る。研究報告の多くは強度面に焦点があてられているが、振動・騒音面からは歯のたわみが樹脂歯車では大きいことによる問題点が指摘されている。

樹脂歯車では放熱性を確保するために金属歯車と組み合わせ使用することも多い。そこで比較の意味も含めて図 51 にナイロン樹脂歯車 (MC901) と金属歯車 (S45C) をかみあわせて回転させたときのそれぞれの歯車の回転方向加速度・横方向加速度を示す^[16]。いずれについても樹脂歯車の方が金属歯車の 2 倍程度大きくっており、大きな振動を生じていることがわかる。図 52 にはその騒音分布を示す。図からわかるように、大きな振動が発生している樹脂歯車の近傍の方が騒音レベルが高い。このような樹脂歯車のたわみの影響を回避するために歯形修正が提案されている。

剛性と高減衰性を期待して金属歯車に樹脂を塗布した例もある^[17]が、耐久性に問題が残っている。ある程度以上の負荷については樹脂歯車の使用は振動・騒音面から問題があるようである。

8. 歯車軸系の騒音

8.1 歯車の振動と騒音 一般的には振動と騒音は深い関係があり、ここまで特に区別せずに論じてきた。ここで、あらためて騒音源として歯車を考察してみる。歯車の直接の騒音原因は二つの歯車が接触しころがりとすべり、そして場合によっては衝突しながら回転していることにある。

図 53 に歯車近傍の音圧と歯元ひずみおよび加速度との関係を調べた実験結果を示す^[4]。音圧と振動加速度を比較すると時間的には一致しない(位相差がある)が、振動加速度と騒音の間には密接な関係があり、振動が騒音を励起していると考えられる。

図 54 には歯車を含む 3 次元の空間でどのように騒音が分布しているか調べた測定結果である^[4]。歯面の接触が騒音の直接の原因であるのなら、歯車を含む平面内で騒音レベルが最大となりそうであるが、いびつながらも球面状に騒音が分布していることがわかる。

この理由の一つとしては歯車がかみあいの衝撃により円板として面内振動を生じていることが考えられる。図 55 に歯車を模擬した円板をさまざまな振動数で加振し共振時のモード形状を観察したものである^[3]。図

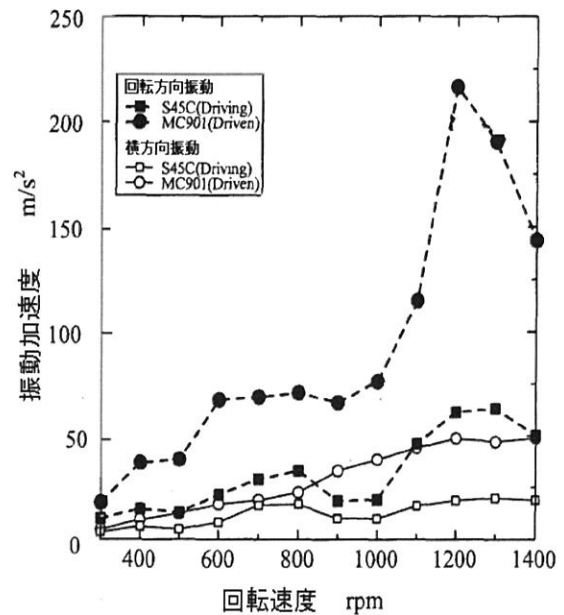


図 51 樹脂歯車と金属歯車の振動加速度の比較^[16]

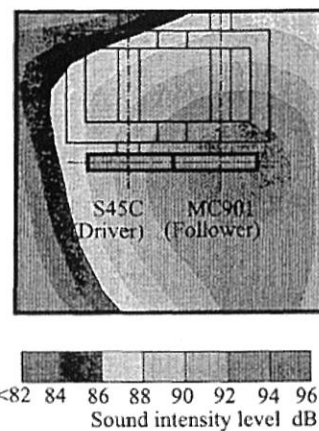


図 52 樹脂歯車と金属歯車のかみあいによる騒音分布 (かみあい振動数 533Hz、歯面負荷 13N/mm)^[16]

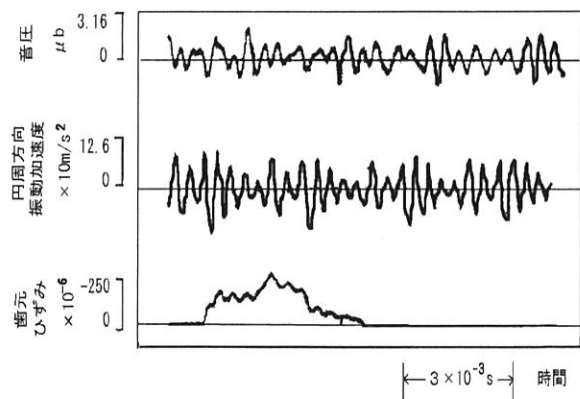


図 53 歯車近傍の音圧と振動加速度・ひずみの関係^[4]

で粒子が線上に集積しているところが振動しない部分(節)となる。このように歯車が面として振動することから歯車に垂直な方向にも騒音が伝播するものと考えられる。この影響は薄肉の歯車ほど大きく、著者も大きなトルク変動が生じる産業機械の試作機で歯車が半鐘のような騒音を発生している例に遭遇したことがある。

8.2 歯車の潤滑状態と騒音 歯車を潤滑したときとしない場合では騒音レベルが大きく異なるのは経験的に理解されている。NIEMANN らの報告^[4]によれば、グリースを塗布した歯車において、そのグリースが切れると 14dB の騒音増加が観察されたという。その一方、図 56 に示すように潤滑状態であれば粘度や油量を変化させても、平歯車とはすば歯車とでは異なった挙動を示したもののその影響はわずかであると報告されている。

ただし特殊な例として、歯車のかみあい点に潤滑油を注いだときに、サイレンのような高周波音が発生し、その騒音量は歯車周速が大きいほどまた歯幅が大きいほど増加するという報告^[2]もある(図 57)。その成分はかみあい振動数とその高調波で、潤滑油の閉じこめ現象と説明されている。

8.3 歯車の騒音伝達経路 歯車軸系における騒音はかみあいを原因としているが、振動と異なり騒音は空气中を伝播して音場の影響を受け、場合によっては再び固体の振動となって現れることもある。そのためその伝達経路を正確に把握することは必ずしも容易で

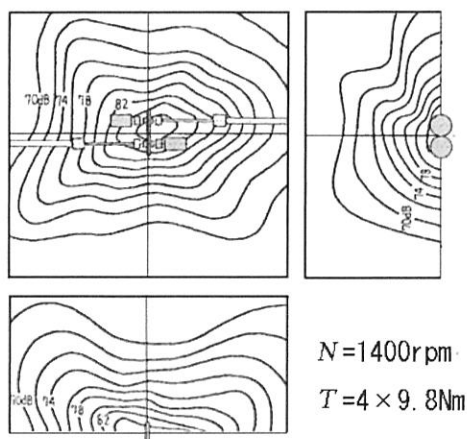


図 54 回転中の歯車の騒音分布^[4]

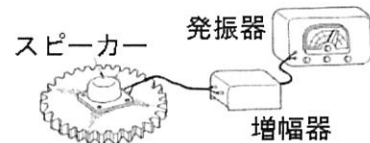
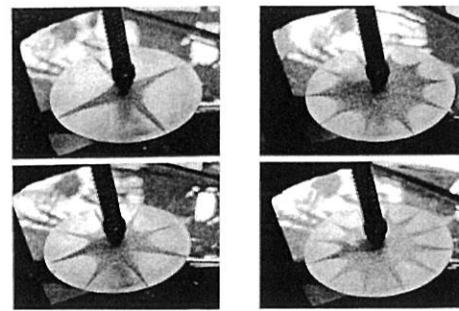
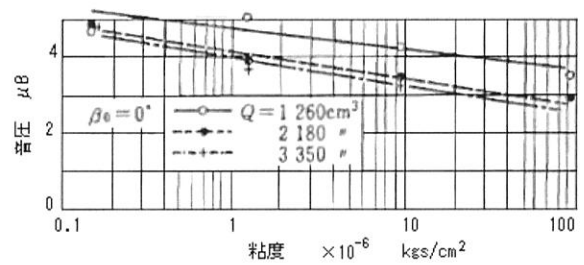
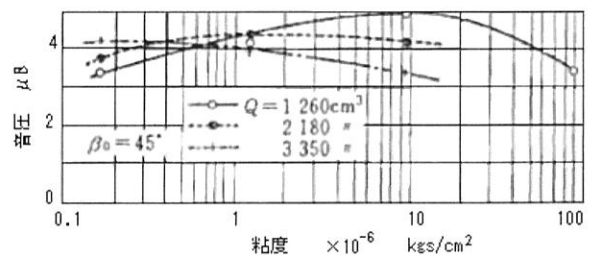


図 55 円板の加振実験結果^[3]



(a) 平歯車の場合



(b) はすば歯車の場合

図 56 潤滑油粘度・油量と騒音の関係^[1]

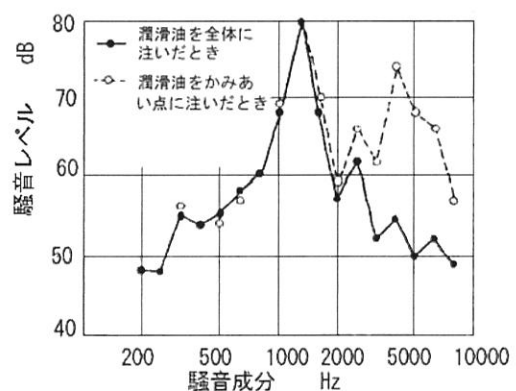
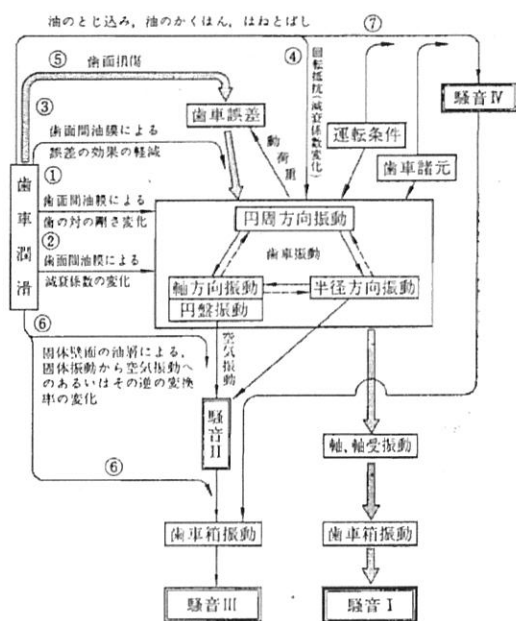


図 57 かみあい点への注油による異常騒音^[2]

はない。図 58 に歯車騒音の伝達経路の考え方 [7] の例を示すが加振源から生じた振動・騒音が外部に騒音としてとらえられるまでにさまざまな経路があることがわかる。

9. まとめ

歯車軸系の振動・騒音について研究展望を試みた。
紙幅の関係で割愛した内容もあるが、小稿が多少なりとも歯車の振動・騒音問題の理解の助けとなれば幸いである。

図 58 歯車騒音の発生・伝達経路^[7]

参考文献

- (1) Geräuschminderung bei Zahnrädern , NIEMANN, G, UNTERBERGER, M., VDI-Z. 101 (1959), page 201 - 212.
- (2) 「歯車の騒音に関する研究 (第1報、騒音測定法の検討および歯車騒音に及ぼす各種要因について)」, 中村 貫太郎, 日本機械学会論文集, Vol.32, No.238, Page1001-1006 (1966)
- (3) 「歯車の騒音と対策」, 小泉晋, 応用機械工学, 1974-9, Page79-111
- (4) 「歯車の振動, 騒音に関する基礎的研究 (第1報, 平歯車の円周方向振動と騒音の関係)」, 会田俊夫ほか, 日本機械学会論文集, Vol.34, No.268, Page2226-2236

- (1968)
- (5)「歯車の振動・騒音の防止方法に関する研究 I (かみあい率と歯車振動の関係)」, 会田俊夫ほか, 日本機械学会論文集, Vol.41, No.345, Page1597-1606 (1975)
- (6)「歯車の振動・騒音の防止方法に関する研究 II (最適歯形修整量について)」, 佐藤進ほか, 日本機械学会論文集, Vol.41, No.345, Page1607-1615 (1975)
- (7)「歯車の振動・騒音と潤滑」, 会田俊夫、久保愛三, 潤滑, 20-4, (1975), Page18-27
- (8)「歯車軸の曲げとねじりの連成振動 I」, 飯田裕ほか, 日本機械学会論文集 C, Vol.46, No.404, Page375-382 (1980)
- (9)「歯車軸の曲げとねじりの連成振動 II(ジャイロ作用の影響)」, 飯田裕ほか, 日本機械学会論文集 C, Vol.49, No.442, Page937-944 (1983.06)
- (10)「歯車軸の曲げとねじりの連成振動 III (中間歯車軸の振動特性)」, 飯田裕ほか, 日本機械学会論文集 C, Vol.51, No.463, Page481-488 (1985.03)
- (11)「歯車軸の曲げとねじりの連成振動 IV (多軸歯車系の振動解析)」, 飯田裕, 日本機械学会論文集 C, Vol.53, No.485, Page15-20 (1987.01)
- (12)「遊星歯車装置太陽軸の異常振動」, 矢鍋重夫, 日本機械学会論文集 C, Vol.61, No.584, Page1271-1278 (1995.04)
- (13)「歯車軸継手で接続された軸系のねじり振動 I (定常応答の解析)」, 金光陽一, 日本機械学会論文集 C, Vol.51, No.464, Page773-780 (1985.04)
- (14)Kahraman, A., "Effect of Axial Vibrations on the Dynamics of a Helical Gear Pair." *ASME Journal of Vibration and Acoustics*, 115, 33-39, 1993.
- (15)「歯車装置異常時の動特性及び異常診断法に関する研究 第 1 報 (平歯車異常時の振動方程式および偏心状態の動特性)」, 陳鵬ほか, 日本機械学会論文集 C, Vol.66, No.650, Page3258-3263 (2000.10.25)
- (16)「動力伝達用プラスチック歯車の振動・騒音に関する研究 (ナイロン歯車の騒音発生機構)」, 扇谷保彦, 日本機械学会機素潤滑設計部門 MPT2004 シンポジウム＜伝動装置＞講演論文集, (2004), Page109-112
- (17)「ハイブリッド歯車」, 甲本忠史、繊維と工業、65-8, (2009), page269-271
- (18)「歯車の歯のたわみについて」, 石川二郎, 機論, 17-59, (1951), Page103-106
- (19)「回転機械の力学」, 山本敏夫、石田幸雄、コロナ社 (2001), Page133
- (20)<http://www.mitsumiike.co.jp/product/power/transmission/index.html>
- (21)<http://www.kovo-nik.co.jp/product/transm.html>